分类号： O175

单位代码：10110
学　　号：s20110076

中北大学
North University Of China

硕士学位论文

几类非线性泛函微分方程的
振动性研究

硕士研究生　　王芳

指导教师　　仉志余

学科专业　　应用数学

2014 年 5 月 20 日

图书分类号 O175　　　　密级 非密

UDC Q332

硕 士 学 位 论 文

几类非线性泛函微分方程的振动性研究

王芳

指导教师（姓名、职称） 仉志余 教授

申请学位级别 理学硕士

专业名称 应用数学

论文提交日期 2014 年 5 月 28 日

论文答辩日期 2014 年 5 月 22 日

学位授予日期 ____年____月____日

论文评阅人 薛玉奎、刘桂荣

答辩委员会主席 赵爱民

2014 年 05 月 20 日

原 创 性 声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在指导教师的指导下，独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：王芳　　日期：2014.5.28

关于学位论文使用权的说明

本人完全了解中北大学有关保管、使用学位论文的规定，其中包括：①学校有权保管、并向有关部门送交学位论文的原件与复印件；②学校可以采用影印、缩印或其它复制手段复制并保存学位论文；③学校可允许学位论文被查阅或借阅；④学校可以学术交流为目的，复制赠送和交换学位论文；⑤学校可以公布学位论文的全部或部分内容（保密学位论文在解密后遵守此规定）。

签　　名：王芳　　日期：2014.5.28

导师签名：何志余　　日期：2014.5.28

目　　录

第一章 绪论 1
1.1 微分方程振动理论的提出 1
1.2 微分方程振动理论的发展 1
1.3 本文主要研究内容 3
第二章 二阶非线性泛函微分方程的振动性 6
2.1 引言 6
2.2 预备知识 7
2.3 主要结果及其证明 7
第三章 三阶非线性中立型微分方程的振动性 17
3.1 三阶非线性中立型微分方程的振动性 17
3.1.1 引言 17
3.1.2 预备知识 18
3.1.3 主要结果及其证明 20
3.2 三阶非线性中立型时滞微分方程的振动性 24
3.2.1 引言 24
3.2.2 预备知识 25
3.2.3 主要结果及其证明 26
总结与展望 29
参考文献 30
致谢 35
攻读硕士学位期间发表的论文及所取得的研究成果 37

几类非线性泛函微分方程的振动性研究

摘要

随着科学技术的迅速发展，许多科学领域出现了关于微分方程的问题，这些问题引起了人们的广泛关注。众所周知，微分方程的振动性理论是微分方程定性理论中的一个极其紧要的分支，它的起源是在 1836 年 sturm 创建的二阶线性常微分方程 $x''(t)+q(t)x(t)=0$ ，奠定了微分方程振动理论的发展根基。近几十年，许多学者在微分方程振动理论方面做了研究和探索，得到一些结论，不断改进和推广已有的结论，不仅具有重要的理论意义，而且也具有较高的实用价值。

本文共分为三个部分：

第一章，绪论，我们回顾了关于微分方程振动理论的历史背景、钻研动向、提出以及发展趋势，并介绍了本文要用到的基本概念，概括了本文所要研究的主要内容和本文的布局。

第二章，二阶非线性泛函微分方程的振动性，我们主要探究二阶非线性泛函微分方程

$$\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)' + q(t)f(y(\tau(t)))g(y'(t))=0，\quad t \geq t_0$$

及

$$\left(a(t)(x'(t))^{\sigma}\right)' + p(x(t))x'(t)+q(t)f(x(\tau(t)))g(x'(t))=0，\quad t \geq t_0$$

解的振动性，其中$t \geq t_0$，σ为正常数，当$t \geq t_0$时，$a(t)>0$，$q(t)\geq 0$，且$q(t)$不最终恒为 0，$\tau'(t)>0$，且有$\lim_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty$，推广了原先已有文献中的一些结果。

第三章，三阶非线性中立型泛函微分方程的振动性，我们主要探究三阶非线性中立型微分方程

$$\left(a(t)[x(t)+p(t)x(\sigma(t))]''\right)' + q(t)f(x(g(t)))\tau(x'(t))=0，\quad t \geq t_0$$

$$\left(a(t)[x(t)+p(t)x(\sigma(t))]''\right)'+q(t)f(x(g(t)))=0,\quad t\geq t_0$$

及

$$\left(r(t)\left(\left(a(t)(x(t)+p(t)x(\sigma(t)))'\right)'\right)^{\alpha}\right)'+q(t)f(x(\tau(t)))=0,\quad t\geq t_0$$

解的振动性，推广了已有文献中的结论。

关键词　泛函微分方程，非线性微分方程，中立型微分方程，振动性，Riccati 变换

Research on Oscillation for Several classes of Nonlinear Functional Differential Equations

Abstract

With the rapid development of science and technology, many fields of science have some problems about differential equation, these issues have increasingly drawn attention. As is known to all, the oscillation of differential equations is a very important branch in differ-
rential equation theory. It began in 1836 and the second order linear ordinary differential equations by the Sturm, this development laid the theoretical foundation oscillation differential equations. In recent years, many scholars do the research and exploration in the oscillation of differential equations, they get some conclusions and continuous improvement and the existing conclusion. What they have done there is an important meaning in theory , also have practical value..

This thesis can be divided into three parts:

The first part describes the introduction. We back to review the history, research dynamic, start and development trend of the oscillation of differential equations. This part introduces the basic concept and summarized the main content and the structure of this article.

The second chapter introduces the oscillation of second order nonlinear functional differential equations and mainly study the equations

$$\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)' + q(t)f(y(\tau(t)))g(y'(t)) = 0, \quad t \geq t_0$$

and equation

$$\left(a(t)(x'(t))^{\sigma}\right)' + p(x(t))x'(t) + q(t)f(x(\tau(t)))g(x'(t)) = 0, \quad t \geq t_0$$

oscillation of the solution, $t \geq t_0$， σ is constant，where $t \geq t_0$， $a(t) > 0$， $q(t) \geq 0$， and $q(t)$ is not constant be zero in final， $\tau'(t) > 0$， and $\lim\limits_{t \to +\infty} \tau(t) = +\infty$， the paper improves the result in

existing literature.

The third chapter introduces the oscillation of the third-order nonlinear neutral functional differential equations and mainly study the equations

$$\left(a(t)[x(t)+p(t)x(\sigma(t))]''\right)'+q(t)f(x(g(t)))\tau(x'(t))=0,\quad t\ge t_0$$

$$\left(a(t)[x(t)+p(t)x(\sigma(t))]''\right)'+q(t)f(x(g(t)))=0,\quad t\ge t_0$$

and equation

$$\left(r(t)\left(\left(a(t)(x(t)+p(t)x(\sigma(t)))'\right)'\right)^{\alpha}\right)'+q(t)f(x(\tau(t)))=0,\quad t\ge t_0$$

there solution is vibration, the paper improves the result in existing literature.

Key words Functional differential equations, Nonlinear differential equations, Neutral functional differential equations,The oscillation, Riccati

第一章 绪论

1.1 微分方程振动理论的提出

随着科学技术的不断发展，社会科学和自然科学等众多学科领域都提到了大量的关于动力学系统的问题，比如，核物理学、生态系统、机械、电子振荡、流行病学、遗传问题、财富分布理论、工业生产管理等都涉及到微分方程理论，它的根源深扎在各类实际问题当中。自然科学和社会科学中的很多规律，用微分方程的语言表达最贴切，在很多应用中都出现了关于微分方程振动解的问题。因此，促使了人们开始对此类困难课题的分析、研究。

1836 年 G.Sturm 通过探究热传导方程建立了二阶线性常微分方程

$$x''(t)+c(t)x(t)=0 \tag{1.1.1}$$

此后，关于线性与非线性方程的振动性理论发生了快速发展。Swason[1] 归纳了线性常微分方程的振动性理论，文献[2-3]探究了一些非线性微分方程的振动性的结论。

1.2 微分方程振动理论的发展

微分方程在实践应用中有着坚实的背景，越来越多的现实问题运用到微分方程的数学模型，所以微分方程的振动理论发展非常迅速。泛函微分方程，差分方程，偏微分方程等领域是由常微分方程的振动理论推广而来的。泛函微分方程振动理论是微分方程定性理论的一个重要的分支，它有着宽泛的应用背景。文献 4 是探究泛函微分方程的振动理论的第一篇有影响力的文献，探讨了 n 阶具偏差变元的微分方程

$$y^{(n)}(t)+p(t)y(\tau(t))=0\text{，}-\infty<t<\infty \tag{1.2.1}$$

其中$n\geq 1$，$p\in C(-\infty,\infty)$，$\tau(t)=k-t$，$k>0$是常数。

这篇论文证明了若对充分大的$|t|$有$p(t)>h>0$，当n为奇数时，式(1.2.1)的所有解变号无限多次；当n为偶数时，式（1.2.1）所有解或是变号奇数次或是变号无限多次。

近几十年，国内外专家学者对微分方程及其解的振动性作了大量的工作，都有非常丰富的结果。Hartman、Fite、Philos 等数学家运用 Ricatti 技巧与函数平均、积分平均方法得到许多经典结果[5-15]。

1949 年，A.Wintner[5]研究：若

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}c(x)dxds=\infty$$

则二阶线性微分方程（1.1.1）振动。

1952 年，P.Hartman[6]研究：若

$$-\infty<\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}c(x)dxds<\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}c(x)dxds\le\infty$$

则方程（1.1.1）振动。

1978 年，Kamenev[7]改进了文献[5]的结果，研究：对某个$\lambda>1$，

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\lambda}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\lambda}c(s)ds=\infty.$$

则方程（1.1.1）振动。

1986 年，Yan[8]探究了一类具有阻尼项的二阶非线性微分方程的振动性，得出了两个新的振动定理。对于方程（1.1.1）的情形，有下面结果：

定理 A[8]：假设对某个$\lambda>1$，

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\lambda}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\lambda}c(s)ds<\infty,$$

若存在一个定义在$[t_0,\infty]$上的连续函数$A(t)$，使得对每一个$T\ge t_0$都有

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\lambda}}\int_{T}^{s}(t-s)^{\lambda}c(s)ds\ge A(T)\text{且}\int_{t_0}^{\infty}A_+^2(s)ds=\infty$$

其中$A_+(s)=\max\{A(s),0\}$，则方程（1.1.1）振动。

1989 年，Philos[9]引入$H(t,s)$函数，将 Kamenev[7]和 Yan[8]的相应成果进行推广，得出方程（1.1.1）的三个振动定理，其一如下：

定理 B[9]：假设 $H:D\equiv\{(t,s):t\geq s\geq t_0\}\to R$ 是一个连续函数且满足：

对所有的 $t\geq t_0$，$H(t,t)=0$，对所有 $t\geq s\geq t_0$，$H(t,s)>0$，且在 D 上，$H(t,s)$ 对 s 有连续且非正的偏导数；若存在连续函数 $h:D\to R$ 使得

$-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)=h(t,s)\sqrt{H(t,s)}$ 对所有 $(t,s)\in D$，且

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)c(s)-\frac{1}{4}h^2(t,s)\right]ds=\infty$$

则方程（1.1.1）振动。

泛函微分方程振动理论在中国的研究发展于 20 世纪 80 年代，在 1980 年，张炳根[16]首次在昆明作了第一篇国内在这一领域的报告。从此以后，在国内引起了对振动理论研究的普遍关注，人们不断提出有关泛函微分方程的新的理论，密切相关的就是中立型微分方程，中立型微分方程的广泛研究只在近二十年才开始发展迅速。有关于中立型微分方程研究有：

1993 年，俞元洪教授和傅希林教授[17]探究了二阶非线性中立型时滞微分方程

$$\left[r(t)[y(t)+py(t-\tau)]'\right]'+q(t)f[y(t-\sigma)]=0$$

的振动性和渐近性。

1995 年，席鸿建[18]探究了二阶非线性中立型时滞微分方程

$$\left[r(t)[x(t)+p(t)x(\tau(t))]'\right]'+q(t)f[x(\sigma(t))]=0$$

的振动性和渐近性。

本文章对几种非线性泛函微分方程的振动性进行了讨论，得到了一些结论，推广了已有文献的成果。

1.3 本文主要研究内容

本文主要考虑了几种非线性泛函微分方程的振动性：

在第二章中，主要探究了二阶非线性泛函微分方程（1.3.1）关于σ是分母为奇数时方程解的振动性和方程（1.3.2）关于$0<\sigma=q/p$，p为奇数，q为偶数时方程解的振动性。其中$t\ge t_0$，σ为正常数，当$t\ge t_0$时，$a(t)>0$，$q(t)\ge 0$，且$q(t)$不最终恒为0，$\tau'(t)>0$，且有$\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty$，并一直假设所考虑的函数在其定义域内连续。

$$\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)'+q(t)f(y(\tau(t)))g(y'(t))=0,\ t\ \ge\ t_0 \tag{1.3.1}$$

$$\left(a(t)(x'(t))^{\sigma}\right)'+p(x(t))x'(t)+q(t)f(x(\tau(t)))g(x'(t))=0,\ t\ \ge\ t_0 \tag{1.3.2}$$

本章中我们总假设：

（A_1）$uf(u)>0(u\ne 0)$，且$f'(u)\ge 0$；

（A_2）存在常数$A>0$,使得$g(u)\ge A$；

（A_3）$q\in C([t_0,+\infty),(0,\infty))$，$\int_{t_0}^{\infty}q(s)ds<\infty$.则$\forall\varepsilon>0$，$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dy}{f(y)^{1/\sigma}}<\infty$；

（A_4）$a\in C([t_0,+\infty),(0,+\infty))$且$\tau(t)\le t$，$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{[a(t)]^{1/\sigma}}dt=+\infty$；

（A_5）$p\in C(R,R)$，$p'(x)\ge 0$，当$x\ne 0$时，$xp(x)>0$且$\int_{-\infty}^{b}p(s)ds>-\infty$，$b$为常数

对于方程（1.3.1）、(1.3.2）分别给出定理 2.2.1 和 2.2.2 及其证明，推广了已有文献中的结果。

在第三章中，分别探究了三阶非线性中立型微分方程（1.3.3）、（1.3.4）和三阶非线性中立型时滞微分方程（1.3.5）的振动性，

$$\left(a(t)[x(t)+p(t)x(\sigma(t))]''\right)'+q(t)f(x(g(t)))=0,\ t\ge t_0 \tag{1.3.3}$$

$$\left(a(t)[x(t)+p(t)x(\sigma(t))]''\right)'+q(t)f(x(g(t)))\tau(x'(t))=0,\ t\ge t_0 \tag{1.3.4}$$

总假设

(H$_1$) $p(t)\in C[t_0,\infty)$， $0\le p(t)\le p<1$；

(H$_2$) $a(t),q(t)\in C([t_0,\infty),(0,\infty)),\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{a(s)}ds=\infty$；

(H$_3$) $\sigma(t),g(t)\in C([t_0,\infty),(0,\infty)),\sigma(t)\le t$, $g(t)\le t$. $\lim_{t\to\infty}\sigma(t)=\lim_{t\to\infty}g(t)=\infty$；

(H$_4$) $\tau(y)\in C(R),\tau(y)\ge L>0$. $y\ne 0$；

(H$_5$) $f\in C(R\times R,R),\frac{f(y)}{y}\ge K>0$, $y\ne 0$.

对于方程（1.3.3)、(1.3.4）分别给出定理 3.2.1 和定理 3.2.2 及其证明，丰富了已有文献中的结论范围。

$$\left(r(t)\left(\left(a(t)(x(t)+p(t)x(\sigma(t)))'\right)'\right)^{\alpha}\right)'+q(t)f(x(\tau(t)))=0,\ t\ge t_0 \qquad (1.3.5)$$

总假设

（A$_1$） $r(t)$， $a(t)$， $p(t)$， $q(t)$， $\sigma(t)$， $\tau(t)\in C[t_0,+\infty)$；

（A$_2$） $r(t)>0$， $a(t)>0$， $r'(t)>0$， $a'(t)>0$，且 $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{a(s)}ds=+\infty$， $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}ds=+\infty$；

（A$_3$）对所有 $t\in[t_0,+\infty)$， $q(t)>0$， $0\le p(t)\le p<1$，其中 p 为常数;

（A$_4$） $\sigma(t)\le t$， $\tau(t)\le t$， $\lim_{t\to+\infty}\sigma(t)=+\infty$， $\lim_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty$；

（A$_5$） $f\in C(R,R)$， $\frac{f(x)}{x^{\alpha}}\ge k$.

给出方程（1.3.5）的定理及证明，推广了已有文献的结果。

第二章 二阶非线性泛函微分方程的振动性

2.1 引言

众所周知，泛函微分方程振动理论在近年来飞快发展，并且获得了非常好的研究成果，如张炳根的文献[19]。泛函微分方程解的振动性在生态模型和机械工程等理论和实践应用中都有着重要的意义。在白玉真、侯新华等[20-25]学者的文献中，探究了二阶非线性微分方程

$$\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)' + q(t)f\left(y(t)\right) = 0\text{，}\ t \geq t_0 \qquad （2..1.1）$$

二阶非线性泛函微分方程

$$\left(a(t)(x'(t))^{\sigma}\right)' + q(t)f\left(x(g(t))\right) = 0\text{，}\ t \geq t_0 \qquad （2.1.2）$$

及

$$\left(a(t)y'(t)^{\sigma}\right)' + q(t)F\left(y(t), y(\tau(t))\right)g\left(y'(t)\right) = 0, t \geq t_0 \qquad （2.1.3）$$

的解的振动性，已获得丰富的成果。

本章利用一些分析的技巧考虑方程（2.1.3）中 $F(u,v) = f(v) \in C(R,R)$ 这一特殊情形时，即考虑方程（2.1.4）对于 σ 是分母为奇数时方程解的振动性，

$$\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)' + q(t)f\left(y(\tau(t))\right)g\left(y'(t)\right) = 0\text{，}\ t \geq t_0 \qquad （2.1.4）$$

以及方程（2.1.5）对于 $0 < \sigma = q/p$， p 为奇数， q 为偶数时方程解的振动性，

$$\left(a(t)(x'(t))^{\sigma}\right)' + p\left(x(t)\right)x'(t) + q(t)f\left(x(\tau(t))\right)g\left(x'(t)\right) = 0\text{，}\ t \geq t_0 \qquad （2.1.5）$$

得到一些解振动的充分性判据，推广了已有的结果。

在这篇文章中，我们考虑方程（2.1.4）、（2.1.5）时，其中 $t \geq t_0$， σ 为正常数，当 $t \geq t_0$ 时， $a(t) > 0$， $q(t) \geq 0$，且 $q(t)$ 不恒为 0， $\tau'(t) > 0$，且有 $\lim\limits_{t \to +\infty} \tau(t) = +\infty$，并一直假定所考虑的函数在它的定义域内是连续的。

如果方程（2.1.4）和（2.1.5）有任意大的零点，则它的一切解是振动的；

如果方程（2.1.4）和（2.1.5）的解是最终正解或最终负解，则它的解是非振动的；

如果方程（2. 1. 4）和（2. 1. 5）一切解都是振动的，则它是振动的，否则它是非振动的。

2.2 预备知识

本章中我们总假设：

（A_1）$uf(u)>0(u\neq 0)$，且 $f'(u)\geq 0$；

（A_2）存在常数 $A>0$，使得 $g(u)\geq A$；

（A_3）$q\in C([t_0,+\infty),(0,\infty))$，$\int_{t_0}^{\infty}q(s)ds<\infty$. 则 $\forall\varepsilon>0$，$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dy}{f(y)^{1/\sigma}}<\infty$；

(A_4) $a\in C([t_0,+\infty),(0,+\infty))$ 且 $\tau(t)\leq t$，$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{[a(t)]^{1/\sigma}}dt=+\infty$；

（A_5） $p\in C(R,R)$，$p'(x)\geq 0$，当 $x\neq 0$ 时，$xp(x)>0$ 且 $\int_{-\infty}^{b}p(s)ds>-\infty$，$b$ 为常数。

2.3 主要结果及其证明

定理 **2.2.1** 设 $x(t)$ 是方程（2.1.4）的一个解，若（A_1)-(A_4)成立，则

（I）$\sigma=$奇数/奇数时，方程（2.1.4）振动；

（II）$\sigma=$偶数/奇数时，方程（2.1.4）的解是振动的，或者是非振动的，并且当 $y(t)$ 是最终正解时，$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$；当 $y(t)$ 是最终负解时，$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=-\infty$.

我们首先来证明结论（I），$\sigma=$奇数/奇数时，结论是成立的。

证明：设方程（2.1.4）的一个非振动解是 $y(t)$。由方程（2.1.4），有

$$\left(\frac{a(t)(y'(t))^{\sigma}}{y(t)}\right)' = \frac{-q(t)f(y(\tau(t)))g(y'(t))}{y(t)} - \frac{a(t)(y'(t))^{\sigma+1}}{y^{2}(t)}$$

$$\leq \frac{-q(t)f(y(\tau(t)))g(y'(t))}{y(t)} \leq 0 \text{（且不恒为 0）} \qquad \text{（2.2.1）}$$

由条件（A_1)-（A_4)可知，$y(t)$不振动时，$y'(t)$也不振动。

我们分情况证明：

（i）设$t \geq T_0 \geq t_0$时，$y(t) > 0$且$y(\tau(t)) > 0$.

情形 1　当$t \geq t_1 \geq T_0$时，$y'(t) > 0$且$y'(\tau(t)) > 0$.

由方程（2.1.4）有

$$\left(\frac{a(t)(y'(t))^{\sigma}}{f(y(\tau(t)))}\right)' = -q(t)g(y'(t)) - \frac{a(t)(y'(t))^{\sigma} f'(y(\tau(t)))y'(\tau(t))\tau'(t)}{\left[f(y(\tau(t)))\right]^{2}} < -Aq(t) \qquad \text{（2.2.2）}$$

对式（2.2.2）由t_1到t积分得

$$\frac{a(t_1)(y'(t))^{\sigma}}{f(y(\tau(t)))} < \frac{a(t_1)(y'(t_1))^{\sigma}}{f(y(\tau(t_1)))} - A\int_{t_1}^{t} q(s)ds \qquad \text{（2.2.3）}$$

根据式（2.2.2）和（2.2.3），当$t \geq t_1$时，有

$$0 \leq \frac{a(t_1)(y'(t))^{\sigma}}{f(y(\tau(t)))} \leq \frac{a(t_1)(y'(t_1))^{\sigma}}{f(y(\tau(t_1)))} - A\int_{t_1}^{t} q(s)ds \qquad \text{（2.2.4）}$$

于是$\frac{a(t)(y'(t))^{\sigma}}{f(y(\tau(t)))} \geq A\int_{t}^{\infty} q(s)ds$　　（2.2.5）

所以$\frac{y'(t)}{\left[f(y(\tau(t)))\right]^{1/\sigma}} \geq A^{1/\sigma}\left(\frac{1}{a(t)}\int_{t}^{\infty} q(s)ds\right)^{1/\sigma}$　　（2.2.6）

结合方程（2.1.4）可得

$$a'(t)(y'(t))^{\sigma} + a(t)\sigma(y'(t))^{\sigma-1}y''(t) + q(t)f(y(\tau(t)))g(y'(t)) = 0 \qquad \text{（2.2.7）}$$

我们结合条件（A_1)-（A_4)及$t \geq t_1$时$y'(t) > 0$可得，当$t \geq t_1$时，$y''(t) \leq 0$.

于是$0<y'(t)\le y'(\tau(t))$，再由式（2.2.6）有

当$t\ge t_1$时，$\dfrac{y'(\tau(t))\tau'(t)}{[f(y(\tau(t)))]^{1/\sigma}}\ge A^{1/\sigma}\tau'(t)\left(\dfrac{1}{a(t)}\int_t^{\infty}q(s)ds\right)^{1/\sigma}$（2.2.8）

对式（2.2.8）从t_1到t积分得

$$A^{1/\sigma}\int_{t_1}^{t}\tau'(s)\left(\frac{1}{a(s)}\int_s^{\infty}q(u)du\right)^{1/\sigma}\le\int_{t_1}^{t}\frac{y'(\tau(s))\tau'(s)}{\left[f(y(\tau(s)))\right]^{1/\sigma}}ds\le\int_{y(t_1)}^{+\infty}\frac{du}{\left[f(u)\right]^{1/\sigma}}\tag{2.2.9}$$

由条件（A_3)可知道，当$t\to+\infty$时，（2.2.9）式的左侧为$+\infty$，与右边为有限数产生矛盾。

情形 2　设$t\ge t_1\ge T_0$时，$y'(t)<0$且$y'(\tau(t))<0$.

由（A_2）可知，当$t\ge t_1$时，

$$\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)'+Aq(t)f(y(\tau(t)))\le\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)'+q(t)f\left(y(\tau(t))\right)g\left(y'(t)\right)$$

从而由方程（2.1.4）得到，当$t\ge t_1$时，

$$\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)'\le-Aq(t)f(y(\tau(t)))<0\tag{2.2.10}$$

对式（2.2.10）由t_1到t积分有

$$a(t)(y'(t))^{\sigma}\le a(t_1)(y'(t_1))^{\sigma}\tag{2.2.11}$$

$$y'(t)\le\left(\frac{a(t_1)}{a(t)}\right)^{1/\sigma}y'(t_1)<0\tag{2.2.12}$$

对式（2.2.12）由t_1到t积分有

$$y(t)\le y(t_1)+(a(t_1))^{1/\sigma}y'(t_1)\int_{t_1}^{t}\left[\frac{1}{a(s)}\right]^{1/\sigma}ds$$

于是由（A_4）可得，当t充分大时，必有$y(t)\le0$，与假设$y(t)>0$矛盾。

（ii）当设$t\ge T_0\ge t_0$时，$y(t)<0$，$y(\tau(t))<0$.

情形 1　设$t \ge t_1 \ge T_0$，$y'(t) > 0$且$y'(\tau(t)) > 0$.

由（A_2)有，$t \ge t_1$时，

$$0 = \left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)' + q(t) f\left(y\left(\tau(t)\right)\right) g\left(y'(t)\right)$$

$$\le \left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)' + Aq(t) f\left(y(\tau(t))\right) \qquad (2.2.13)$$

对式（2.2.13）从t_1到t积分有

$$a(t)\left(y'(t)\right)^{\sigma} \ge a(t_1)\left(y'(t_1)\right)^{\sigma} + A\int_{t_1}^{t}\left(-f\left(y\left(\tau(t)\right)\right)\right) q(s)\,ds$$

$$\ge a(t_1)(y'(t_1))^{\sigma} > 0 \qquad (2.2.14)$$

于是有

$$y'(t) \ge \left(\frac{a(t_1)}{a(t)}\right)^{1/\sigma} y'(t_1) > 0 \qquad (2.2.15)$$

对式（2.2.15）从t_1到t积分有

$$y(t) \ge y(t_1) + (a(t_1))^{1/\sigma} y'(t_1) \int_{t_1}^{t} \left[\frac{1}{a(s)}\right]^{1/\sigma} ds$$

从而当t充分大时，必有$y(t) \ge 0$，与假设矛盾。

情形 2　设$t \ge t_1 \ge T_0$时，$y'(t) < 0$，且$y'(\tau(t)) < 0$.由条件（A_1)-（A_4)，可得到式（2.2.2)、(2.2.3）仍然成立，由式（2.2.3）的右边为$-\infty$，而左边非负，从而导出矛盾。由条件（A_1)-（A_4)可得式（2.2.4）-（2.2.7）仍然成立，由式（2.2.7）可得，当$t \ge t_1$时，

$y''(t) \ge 0$.

从而$y'(\tau(t)) \le y'(t) < 0$.由式（2.2.6）有

$$\frac{y'(\tau(t))\tau'(t)}{\left[f(y(\tau(t)))\right]^{1/\sigma}} \ge A^{1/\sigma} \tau'(t) \left(\frac{1}{a(t)} \int_{t}^{\infty} q(s)\,ds\right)^{1/\sigma}$$

对上式从t_1到t积分，类似（I）情形 1，由条件（A_1)-（A_4)即可证明矛盾。

接下来我们证明结论（II），$\sigma=$偶数/奇数时，结论成立。

证明：由方程（2.1.4）有，

当$y(t)>0$时，$\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)'\le 0$（不恒为0）且$a(t)(y'(t))^{\sigma}\ge 0$；

当$y(t)<0$时，$\left(a(t)(y'(t))^{\sigma}\right)'\ge 0$（不恒为0）且$a(t)(y'(t))^{\sigma}\ge 0$。

结合条件（A_1)-（A_4)可知，当$y(t)$不振动时，$y'(t)$也不振动。

分情形证明：

（i）当$t\ge T_0\ge t_0$时，$y(t)>0$且$y(\tau(t))>0$.

情形1　当$t\ge t_1\ge T_0$时，$y'(t)>0$且$y'(\tau(t))>0$.

由条件（A_1)-（A_4)，可知式（2.2.2）-（2.2.9）成立，从而导出矛盾，该情形不成立。

情形2　当$t\ge t_1\ge T_0$时，$y'(t)<0$且$y'(\tau(t))<0$.

由$y(t)>0$可知，当$t\to+\infty$时，$y(t)$存在非负的极限。设$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=M>0$，则当$t\ge t_1$时，

由$y(\tau(t))\ge M$，可得$f(y(\tau(t)))\ge f(M)>0$.

于是，对式（2.2.10）从t_1到t积分有

$$\begin{aligned}a(t)(y'(t))^{\sigma}&\le a(t_1)(y'(t_1))^{\sigma}-A\int_{t_1}^{t}f(y(\tau(t)))q(s)ds\\&\le a(t_1)(y'(t_1))^{\sigma}-Af(M)\int_{t_1}^{t}q(s)ds\end{aligned}$$

由条件（A_4)可知，$t\to+\infty$时上式右边为$-\infty$，与左边非负矛盾，从而有$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$.

当$t_2\ge t_1$时，对式（2.2.10）从t_2到$t\in[t_2,+\infty)$积分有

$$0<a(t)(y'(t))^{\sigma}\le a(t_2)(y'(t_2))^{\sigma}-Af(M)\int_{t_1}^{t}q(s)ds\,,\ t\ge t_2 \tag{2.2.16}$$

$$a(t_2)(y'(t_2))^{\sigma}\ge Af(M)\int_{t_2}^{\infty}q(s)ds$$

从而当$t\ge t_1$时

$$-y'(t)\geq\left(Af(M)\frac{1}{a(t)}\int_t^{\infty}q(s)ds\right)^{1/\sigma} \tag{2.2.17}$$

对式（2.2.17）从 t_1 到 $t\in[t_1,+\infty)$ 积分有

$$y(t_1)\geq y(t_1)-y(t)\geq(Af(M))^{1/\sigma}\int_{t_1}^{t}\left(\frac{1}{a(s)}\int_t^{\infty}q(u)du\right)^{1/\sigma}ds \tag{2.2.18}$$

令 $t\to+\infty$，则式（2.2.18）的右边为 $+\infty$，与左边为有限数产生矛盾，从而有 $\lim_{t\to+\infty}y(t)=0$.

（ii）设 $t\geq T_0\geq t_0$ 时，$y(t)<0$ 且 $y(\tau(t))<0$，证明类似于（I）。

例子

考虑方程

$$\left(e^{\frac{3}{2}t}(y'(t))^2\right)'+\frac{1}{2}y\left(\frac{t}{2}\right)=0 \tag{2.2.19}$$

令 $a(t)=e^{\frac{3}{2}t}$，$q(t)=\frac{1}{2}$，$f(y)=y,\sigma=2,\tau(t)=\frac{t}{2}$,则式（2.2.19）满足定理的条件，方程（2.2.19）存在非振动解 $y(t)=e^{-t}$，且 $\lim_{t\to+\infty}y(t)=0$。

定理 **2.2.2** 设 $x(t)$ 是方程（2.1.5）的一个解，若（A_1)-(A_5)成立，则方程（2.1.5）振动，或者有非振动解的存在，且当 $x(t)$ 是最终正解时，$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$，当 $x(t)$ 是最终负解时，$\lim_{t\to\infty}x(t)=-\infty$.

证明：假设 $x(t)$ 是方程（2.1.5）的一个非振动解

下面我们分情况讨论

（I）设 $x(t)>0,x(\tau(t))>0,t\geq t_0$，且 $\limsup_{t\to\infty}x(t)>0$.

由方程（2.1.5）有，

$$\left(\frac{a(t)(x'(t))^{\sigma}}{f(x(\tau(t)))}\right)'=-q(t)g(x'(t))-\frac{p(x(t))x'(t)}{f(x(\tau(t)))}\frac{a(t)(x'(t))^{\sigma}f(x(\tau(t)))x'(\tau(t))\tau'(t)}{f^2(x(\tau(t)))} \tag{2.2.20}$$

情形 1 设当$t \ge t_1 \ge t_0$， $x'(t) \ge 0$， $x'(\tau(t)) \ge 0$，则有式（2.2.20）可得

$$\left(\frac{a(t)(x'(t))^{\sigma}}{f(x(\tau(t)))}\right)' \le -Aq(t), \qquad t \ge t_1 \ge t_0 \tag{2.2.21}$$

对式（2.2.21）由t_1到t积分得

$$\frac{a(t)(x'(t))^{\sigma}}{f(x(\tau(t)))} \le \frac{a(t_1)(x'(t_1))^{\sigma}}{f(x(\tau(t_1)))} - A\int_{t_1}^{t} q(s)ds \tag{2.2.22}$$

令$t \to +\infty$，则由（A_3）可知，式(2.2.22)左边为非负的，右边趋于$-\infty$，与右边为有限数产生矛盾。

情形 2 设当$t \ge t_1 \ge t_0$， $x'(t) \le 0$， $x'(\tau(t)) \le 0$.

由（A_3）可知，存在$t_2 \ge t_1$，使得 $\int_{t_2}^{t} q(s)ds \ge 0$， $t \ge t_2$.

由条件（A_2） $g(u) \ge A$得

$$\begin{aligned} 0 &= \left(a(t)(x'(t))^{\sigma}\right)' + p(x(t))x'(t) + q(t)f(x(\tau(t)))g(x'(t)) \\ &\ge \left(a(t)(x'(t))^{\sigma}\right)' + p(x(t))x'(t) + Aq(t)f(x(\tau(t))) \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

对式(2.2.23)由t_2到t积分得

$$\begin{aligned} a(t)(x'(t))^{\sigma} &\le a(t_2)(x'(t_2))^{\sigma} - Af(x(\tau(t)))\int_{t_2}^{t} q(s)ds \\ &\quad + A\int_{t_2}^{t} f'(x(\tau(s)))x'(\tau(s))\tau'(s)\int_{t_2}^{s} q(\theta)d\theta ds \\ &\quad - p(x(t))x(t) + p(x(t_2))x(t_2) + \int_{t_2}^{t} p'(x(s))x'(s)ds \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

由$\limsup\limits_{t\to\infty} x(t) > 0$， $x'(t) \le 0$， $t \ge t_1 \ge t_0$，可知$x(t) \to M$,$t \to \infty$， $x(\tau(t)) \ge M$ ， $t \ge t_2$，因此由（A_1）可得

$$f(x(\tau(t))) \ge f(M) > 0$$

上式代入式(2.2.24)可得

$$a(t)(x'(t))^{\sigma} \le a(t_2)(x'(t_2))^{\sigma} - Af(M)\int_{t_2}^{t} q(s)ds + p(x(t_2))x(t_2) \tag{2.2.25}$$

令$t \to +\infty$，式(2.2.25)左边非负，右边趋于$-\infty$，与右边为有限数矛盾。

情形 3 设$x'(t)$振动，则存在$\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$，$V_k \to \infty$，$k \to \infty$，使得$x'(V_k)=0$，取足够大的k，使得$V_k \ge t_0$，$x'(t)>0$，$x'(\tau(t))>0$，$t \in (V_k, V_{k+1})$，根据（A_3）可得

$$\int_{V_k}^{V_{k+1}} q(s)ds > 0 \tag{2.2.26}$$

由式（2.2.20）有

$$\left(\frac{a(t)(x'(t))^{\sigma}}{f(x(\tau(t)))}\right)' \le -Aq(t)，\ V_k \le t \le V_{k+1}$$

对上式由V_k到V_{k+1}积分得

$$-\int_{V_k}^{V_{k+1}} q(s)ds \ge \frac{a(t)(x(t))^{\sigma}}{f(x(\tau(s)))}\Big|_{V_k}^{V_{k+1}} = 0$$

这与式(2.2.26)相矛盾。

（II）设$x(t)<0$，$x(\tau(t))<0$，$t \ge t_0$且$\limsup_{t\to\infty} x(t) = M > -\infty$.

情形 1 当$t \ge t_1 \ge t_0$，$x'(t) \ge 0$，$x'(\tau(t)) \ge 0$.

根据（A_3)可知，存在$t_2 \ge t_1$，使得$\int_{t_2}^{t} q(s)ds \ge 0$，$t \ge t_2$.

对式(2.2.23)由t_2到t积分得

$$a(t)(x'(t))^{\sigma} \le a(t_2)(x'(t_2))^{\sigma} - A\int_{t_2}^{t} q(s)f(x(\tau(s)))ds - \int_{t_2}^{t} p(x(s))x'(s)ds \ge a(t_2)(x'(t_2))^{\sigma}$$

因此

$$x'(t) \ge a^{\frac{1}{\sigma}}(t_2)x'(t_2)a^{-\frac{1}{\sigma}}(t) \tag{2.2.27}$$

对式(2.2.27)由t_2到t积分得

$$x(t) \ge x(t_2) + a^{\frac{1}{\sigma}}(t_2)x'(t_2)\int_{t_2}^{t} a^{-\frac{1}{\sigma}}(s)ds.$$

令$t \to +\infty$，则由（A_4）可知，上式左侧是非负的，右侧是趋于$+\infty$，与右边为有限数产生矛盾。

情形 2 设当$t \ge t_1 \ge t_0$，$x'(t) < 0$，$x'(\tau(t)) < 0$.$\limsup_{t\to\infty} x(t) = M_1 > -\infty$.

对式（2.2.23)由s $(s \ge t_1)$到t积分得

$$a(t)(x'(t))^{\sigma} \le a(s)(x'(s))^{\sigma} - A\int_s^t q(\theta)f(x(\tau(\theta)))d\theta - \int_s^t p(x(\theta))x'(\theta)d\theta \qquad (2.2.28)$$

由$x'(t) < 0$，$\tau'(t) > 0$，$f'(u) \ge 0$知，当$s < \theta < t$时

$$f(x(\tau(t))) < f(x(\tau(\theta))) < f(x(\tau(s))).$$

故$-\int_s^t q(\theta)f(x(\tau(\theta)))d\theta > -f(x(\tau(s)))\int_s^t q(\theta)d\theta$

又$-\int_s^t p(x(\theta))x'(\theta)d\theta = -\int_s^t p(x(\theta))dx(\theta) = \int_{x(t)}^{x(s)} p(u)du$

$$\ge \int_{-\infty}^{x(s)} p(u)du = \int_{-\infty}^{b} p(u)du + \int_{b}^{x(s)} p(u)du .$$

根据（A_3）、(A_5)可知，存在t_3使得

$$-A\int_s^t q(\theta)f(x(\tau(\theta)))d\theta - \int_s^t p(x(\theta))x'(\theta)d\theta$$

$$> -Af(x(\tau(s)))\int_s^t q(\theta)d\theta + \int_{-\infty}^{b} p(u)du + \int_{b}^{x(s)} p(u)du$$

$$> 0,\quad t \ge t_3 .$$

把上式代入式(2.2.28)得到

$$a(t)(x'(t))^{\sigma} \ge a(s)(x'(s))^{\sigma},\quad t \ge t_3$$

因此得

$$x'(t) \ge a^{\frac{1}{\sigma}}(s)x'(s)a^{-\frac{1}{\sigma}}(t),\quad t \ge t_3 \qquad (2.2.29)$$

对式(2.2.29)由t_3到t积分得

$$x(t) \le x(t_3) + a^{\frac{1}{\sigma}}(s)x'(s)\int_{t_3}^{t} a^{-\frac{1}{\sigma}}(\theta)d\theta \qquad (2.2.30)$$

令$t \to \infty$，上式右边趋于$-\infty$，左边趋于$M_1 > -\infty$，矛盾。

情形 3 设$x'(t)$振动，此证明与（I）中的情形 3 的证明相似，定理证毕。

第三章 三阶非线性中立型微分方程的振动性

3.1 三阶非线性中立型微分方程的振动性

3.1.1 引言

本章主要考虑三阶非线性中立型微分方程（3.1.11）和（3.1.12）的振动问题，运用广义的 Riccati 变换和积分平均技巧，创建了有关方程解振动的一些充分条件。

$$\left(a(t)[x(t)+p(t)x(\sigma(t))]''\right)'+q(t)f(x(g(t)))\tau(x'(t))=0,\quad t\ge t_0 \tag{3.1.11}$$

$$\left(a(t)[x(t)+p(t)x(\sigma(t))]''\right)'+q(t)f(x(g(t)))=0,\ t\ge t_0 \tag{3.1.12}$$

假设以下条件成立：

(H_1) $p(t)\in C[t_0,\infty)$，$0\le p(t)\le p<1$；

(H_2) $a(t),q(t)\in C([t_0,\infty),(0,\infty)),\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{a(s)}ds=\infty$；

(H_3) $\sigma(t),g(t)\in C([t_0,\infty),(0,\infty)),\sigma(t)\le t,g(t)\le t.\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\infty$；

(H_4) $\tau(y)\in C(R),\tau(y)\ge L>0.y\ne 0$；

(H_5) $f\in C(R,R),\frac{f(y)}{y}\ge K>0,y\ne 0.$

定义函数 $Z(t)=x(t)+p(t)x(\sigma(t))$ （3.1.13）

则方程（3.1.1）变为 $\left[a(t)(z(t))''\right]'+q(t)f(x(g(t)))\tau(x'(t))=0.$ （3.1.14)

我们称方程（3.1.1）的解是指函数 $x(t)\in C^1[T_x,\infty)$，$T_x\ge t_0$，使得 $a(t)z''(t)\in C^1(T_x,\infty)$ 且在 $[T_x,\infty)$ 上满足方程（3.1.1）。本文考虑了方程（3.1.1）满足性质 $\sup\{|x(t)|:t\ge T\}>0$ 对一切的 $T\ge T_x$ 成立的解。如果方程（3.1.1）在 $[T_x,\infty)$ 上有零点且任意大，则它是振动的；

否则，它是非振动的。

本文中如无显著声明，都是最终成立，即存在T充分大，使得不等式对$t \ge T$成立。

近些年，关于微分方程振动性理论受到普遍的关注，与二阶微分方程的振动性相比，三阶泛函微分方程的振动研究结果相对少一些。三阶泛函微分方程的振动结果可参考屈英等人[26]-[30]的文献和其引文，其中余元洪[26]的文献考虑了三阶中立型微分方程

$$\left(r(t)[x(t)+p(t)x(\sigma(t))]''\right)'+q(t)f(x(\tau(t)))=0 \qquad (3.1.15)$$

的振动条件和结果。本小节是将（3.1.11）关于方程（3.1.15）的振动结果推广到方程（3.1.11），运用广义 Riccati 变换和 Philos 型积分平均条件建立使方程（3.1.11）的所有解振动或收敛到零的充分条件。

3.1.2 预备知识

证明本文的定理时，需要运用下列引理。

引理 **3.1.21** 设$x(t)$是方程（3.1.11）的正解，则由式（3.1.13）定义的函数$z(t)$仅有以下两种性质之一：

(I) $z(t)>0$，$z'(t)>0$，$z''(t)>0$；

(II) $z(t)>0, z'(t)<0$，$z''(t)>0$.

证明：设$x(t)$是方程（3.1.11）在$[t_0,\infty)$上的正解，故有$z(t)>x(t)>0$，$t_1 \ge t_0$，

那么$x(\sigma(t))>0$，$x(g(t))>0$，$t \ge t_1$.且$(a(t)z''(t))' = -q(t)f(x(g(t)))\tau(x'(t))<0$，则$a(t)z''(t)$为减函数且最终定号.

因此存在$z''(t)>0$和$z''(t)<0$两种情况，$t \ge t_2 \ge t_1$.

若$z''(t)<0$，存在常数$M>0$，使得

$$a(t)z''(t) \le -M<0, \quad t \ge t_2$$

上式在$[t_2,t]$积分得

$$z'(t)\le z'(t_2)-M\int_{t_2}^{t}\frac{1}{a(s)}ds$$

令$t\to\infty$,根据（H_2)得到$z'(t)\to$-∞，因此，$z'(t)$最终为负.

但是，$z''(t)<0$和$z'(t)<0$可知$z(t)<0$，与$z(t)>0$矛盾，故有$z''(t)>0$.

因此，$z(t)$仅有（I）和（II）两种性质，引理 3.1.21 证毕。

引理 **3.1.22** 设$x(t)$是方程（3.1.11）的正解，相应的z(t)具有性质（II），若

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{v}^{\infty}\left(\frac{1}{a(u)}\int_{u}^{\infty}q(s)ds\right)dudv=\infty \qquad (3.1.21)$$

则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$.

证明：假设$x(t)$是方程（3.1.11）的正解，z(t)具有性质（II），因此存在常数$l\ge 0$，使得$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=l$.我们断言$l=0$.实际上，如果$l>0$，则对任意$\varepsilon>0$，有$l+\varepsilon>z(t)>l$.

取$0<\varepsilon<\dfrac{l(1-p)}{p}$.根据（$H_2$）和性质（II），得

$$x(t)=z(t)-p(t)x(\sigma(t))>l-pz(\sigma(t))>l-p(l+\varepsilon)=k(l+\varepsilon)>kz(t) \qquad (3.1.22)$$

其中$k=\dfrac{l-p(l+\varepsilon)}{l+\varepsilon}>0$.

根据（H_4），（H_5）和式（3.1.22），方程（3.1.11）得到

$$\left(a(t)z''(t)\right)'+KkLq(t)z(g(t))\le 0,\ t\ge t_1 \qquad (2.1.23)$$

对式（2.1.23）在$[t,\infty)$积分得到

$$-a(t)z''(t)+KkL\int_{t}^{\infty}q(s)z(g(s))ds\le 0$$

根据（H_3）知$z(g(t))>l$，　$t\ge t_2\ge t_1$，有

$$-z''(t)+\frac{KkLl}{a(t)}\int_t^{\infty}q(s)ds\le 0\,,\quad t\ge t_2$$

对上式在$[t,\infty)$积分得

$$z'(t)+KkLl\int_t^{\infty}\left(\frac{1}{a(u)}\int_u^{\infty}q(s)ds\right)du\le 0 \tag{3.1.24}$$

对式（3.1.24）在$[t_2,\infty)$积分得到

$$\int_{t_2}^{\infty}\int_v^{\infty}\left(\frac{1}{a(u)}\int_u^{\infty}q(s)ds\right)dudv\le\frac{z(t_2)}{KkLl} \tag{3.1.25}$$

式（3.1.25）与式（3.1.21）矛盾，故$l=0$.引理 3.1.22 证毕.

引理 **3.1.23**[29] 设$u(t)>0$，$u'(t)>0$，$u''(t)\le 0$，$t\ge t_0$，则对每一$\alpha\in(0,1)$，存在$T_\alpha\ge t_0$使$u(\sigma(t))\ge\alpha\frac{\sigma(t)}{t}u(t)$，$t\ge T_\alpha$.

引理 **3.1.24**[25] 设$u(t)>0$，$u'(t)>0$，$u''(t)>0$，$u'''(t)\le 0$，$t\ge T_\alpha$，则存在$\beta\in(0,1)$和$T_\beta\ge T_\alpha$使得$u(t)\ge\beta tu'(t)$，$t\ge T_\beta$.

3.1.3 主要结果及其证明

先考虑方程（3.1.11）的振动性.

下面运用 Philos 型的积分平均条件[6]，给出方程（3.1.11）的新的振动结果，为此，我们引进函数 X。令

$$D=\{(t,s):t\ge s\ge t_0\},\qquad D_0=\{(t,s):t>s\ge t_0\}$$

函数$H\in C(D,R)$称为属于X类，记作$H\in X$.如果

（i）$H(t,t)=0,\ t\ge t_0$；$H(t,s)>0$，$(t,s)\in D_0$.

（ii）$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\le 0$且存在$\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$，$h\in C(D_0,R)$使得

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}H(t,s)=-h(t,s)\sqrt{H(t,s)} \qquad (3.1.31)$$

定理 **3.1.31** 设方程（3.1.11）成立。若存在 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$， $H\in X$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)Q(s)-\frac{1}{4}\rho(s)a(s)h^2(t,s)\right]ds=\infty \qquad (3.1.32)$$

则方程（3.1.11）的每一个解 $x(t)$ 振动，或当 $t\to\infty$ 时 $x(t)\to 0$.

其中 $Q(s)=\alpha\beta KL(1-p)\frac{g^2(s)}{s}q(s)\rho(s)$. （3.1.33）

α 和 β 由引理 3.1.23 和引理 3.1.24 定义。

证明：设方程（3.1.11）有非振动解 $x(t)$ 存在.普遍地，设 $x(t)>0$， $x(\sigma(t))>0$，$x(g(t))>0, t\ge t_1\ge t_0$。（3.1.13）式定义的函数 $z(t)=x(t)+p(t)x(\sigma(t))$。由引理 3.1.21 可知，$z(t)$ 仅有两种性质（I）或（II）。

（i）设 $z(t)$ 有性质（I），即 $z'(t)>0$。则

$$x(t)=z(t)-p(t)x(\sigma(t))\ge z(t)-pz(\sigma(t))\ge(1-p)z(t) \qquad (3.1.34)$$

因此由（H_4）、（H_5），方程（3.1.11）得到

$$(a(t)z''(t))'\le -KLq(t)x(g(t))\le -KL(1-p)q(t)z(g(t)) \qquad (3.1.35)$$

令 $W(t)=\rho(t)\frac{a(t)z''(t)}{z'(t)}$ ， $t\ge t_1$ （3.1.36）

根据式（3.1.34)、（3.1.35)，有

$$W'(t)\le -\frac{KL(1-p)\rho(t)q(t)z(g(t))}{z'(t)}+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)-\frac{W^2(t)}{\rho(t)a(t)} \qquad (3.1.37)$$

取 $W(t)=z'(t)$，根据引理 3.1.23 和引理 3.1.24，由式（3.1.37）得

$$W'(t) \le -Q(t) + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} W(t) - \frac{W^2(t)}{\rho(t)a(t)} \tag{3.1.38}$$

其中$Q(t)$有式（3.1.33）定义。令$A(t) = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}$. $B(t) = \frac{1}{\rho(t)a(t)}$.

对式（3.1.38）在$[t_2, t]$积分得到

$$\int_{t_2}^{t} H(t,s)Q(s)ds \le \int_{t_2}^{t} H(t,s)\left[-W'(s) + A(s)W(s) - B(s)W^2(s)\right]ds$$

$$= -H(t,s)W(s)\Big|_{t_2}^{t} + \int_{t_2}^{t}\left[\left(\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} + A(s)H(t,s)\right)W(s) - H(t,s)B(s)W^2(s)\right]ds$$

$$= H(t,t_2)W(t_2) - \int_{t_2}^{t}\left[\sqrt{H(t,s)}h(t,s)W(s) + H(t,s)B(s)W^2(s)\right]ds$$

$$= H(t,t_2)W(t_2) - \int_{t_2}^{t}\left[\sqrt{H(t,s)B(s)}W(s) + \frac{h(t,s)}{2\sqrt{B(s)}}\right]^2 ds + \int_{t_2}^{t} \frac{h^2(t,s)}{4B(s)} ds$$

那么

$$\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}\left[H(t,s)Q(s) - \frac{h^2(t,s)}{4B(s)}\right]ds \le W(t_2)$$

又$B(t) = \frac{1}{\rho(t)a(t)}$

故$\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^{t}\left[H(t,s)Q(s) - \frac{1}{4}\rho(s)a(s)h^2(t,s)\right]ds \le W(t_2)$

上式与式（3.1.32）矛盾。

（ii）如果$z(t)$具有性质（II），由于（3.1.21）式成立，因此，满足引理 3.1.22 的条件，则有$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$，定理 3.1.31 证毕。

下面考虑方程（3.1.12）的振动性。

定理 **3.3.2**　设方程（3.1.12）成立，若一阶时滞方程

$$\omega'(t)+q(t)f\left[\int_{t_0}^{g(t)}(g(t)-u)\frac{1}{a(u)}du\right]\omega^{\beta}(t)=0 \tag{3.1.39}$$

是振动的，则方程（3.1.12）的解振动，或者 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$。

证明：假设方程（3.1.12）有非振动解 $x(t)$，设 $x(t)>0$，$t\ge t_0$。由引理 3.1.21 可知，$z(t)$ 仅满足两种性质（I）或（II）。

设 $z(t)$ 有性质（I），由于 $a(t)z''(t)$ 是减函数，于是

$$z'(t)\ge\int_{t_1}^{t}z''(u)du=\int_{t_1}^{t}\frac{1}{a(u)}[a(u)(z''(u))]du\ge[a(t)(z''(t))]\int_{t_1}^{t}\frac{1}{a(s)}ds$$

对上式在 $[t_1,t]$ 积分得到

$$z(t)\ge\int_{t_1}^{t}[a(u)z''(u)]\int_{t_1}^{u}\frac{1}{a(s)}dsdu$$

$$\ge[a(t)(z''(t))]\int_{t_1}^{t}(t-s)\frac{1}{a(s)}ds$$

有 $t_2\ge t_1$，使得 $t\ge t_2$，得到

$$z(g(t))\ge\omega(g(t))\int_{t_2}^{g(t)}(g(t)-s)\frac{1}{a(s)}ds.$$

其中 $\omega(t)=a(t)(z''(t))$.

从而得出

$$-\omega'(t)=q(t)f(x(g(t)))\ge q(t)f(\omega(g(t)))\int_{t_2}^{g(t)}(g(t)-s)\frac{1}{a(s)}ds$$

$$\ge q(t)f\left[\int_{t_2}^{g(t)}(g(t)-s)\frac{1}{a(s)}ds\right](\omega^{\beta}(t)).$$

其中当 $f(x)$ 选取特殊函数，即 $f(x)=x^{\beta}$ 时，

最后得到$\omega(t)$是$\omega'(t)+q(t)f\left[\int_{t_2}^{g(t)}(g(t)-s)\frac{1}{a(s)}ds\right]\omega^{\beta}(t)\le 0$的正解。

因此方程（3.1.39）有正解，与方程（3.1.39）是振动的产生矛盾，于是$z(t)$满足引理 3.1.21（II）。由引理 3.1.22 得到$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。证毕。

3.2 三阶非线性中立型时滞微分方程的振动性

3.2.1 引言

本小节考虑三阶非线性中立型时滞微分方程

$$\left(r(t)\left(\left(a(t)(x(t)+p(t)x(\sigma(t)))'\right)'\right)^{\alpha}\right)'+q(t)f(x(\tau(t)))=0,\ t\ge t_0 \qquad (3.2.11)$$

其中$0<\alpha=\frac{q}{p}$，p，q都为奇数时方程解的振动性。

我们总假设方程（3.2.11）满足：

（A_1）$r(t)$，$a(t)$，$p(t)$，$q(t)$，$\sigma(t)$，$\tau(t)\in C[t_0,+\infty)$；

（A_2）$r(t)>0$，$a(t)>0$，$r'(t)>0$，$a'(t)>0$，且$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{a(s)}ds=+\infty$，$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}ds=+\infty$；

（A_3）对所有$t\in[t_0,+\infty)$，$q(t)>0$，$0\le p(t)\le p<1$，其中p为常数；

（A_4）$\sigma(t)\le t$，$\tau(t)\le t$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t)=+\infty$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty$；

（A_5）$f\in C(R,R)$，$\frac{f(x)}{x^{\alpha}}\ge k$.

令$z(t)=x(t)+p(t)x(\sigma(t))$，$t\ge t_0$ （3.2.12）

我们称方程（3.2.11）的解是指函数$x(t)\in C^1[T_x,\infty)$，$T_x\ge t_0$，使得

$r(t)\left(\left(a(t)(z(t))'\right)'\right)^{\alpha} \in C^1[T_x,+\infty)$且在$[T_x,\infty)$上满足方程（3.2.11）。

若方程（3.2.11）的解$x(t)$在$[T_x,\infty)$上有零点且是任意大的，那么方程（3.2.11）振动的，否则是非振动的；

若方程（3.2.11）的解$x(t)$或者是振动的或者满足$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$，那么方程（3.2.11）是弱振动。

3.2.2 预备知识

引理 **3.2.2** 设$x(t)$是方程（3.2.11）的正解，$z(t)$是由式（3.2.12）定义的函数，则必有下面两种情形：

（I）$z(t)>0$，$a(t)z'(t)>0$，$(a(t)z'(t))'>0$；

（II）$z(t)>0$，$a(t)z'(t)<0$，$(a(t)z'(t))'>0$。

证明：设$x(t)$是方程（3.2.11）的正解，则存在$t_1 \in [t_0,+\infty)$使得对一切$t \in [t_1,+\infty)$有

$$x(t)>0,\quad x(\sigma(t))>0,\quad x(\tau(t))>0$$

由条件（A_3）可知，$z(t)\geq x(t)>0$对一切$t\in[t_1,+\infty)$成立。

有条件（A_5）可知，$q(t)>0$，$\dfrac{f(x(\tau(t)))}{x^{\alpha}(\tau(t))}>k>0$，因此对一切$t\in[t_1,+\infty)$有$f(x(\tau(t)))>0$。

所以方程（3.2.11）可得

$$\left(r(t)\left((a(t)z'(t))'\right)^{\alpha}\right)' = -q(t)f(x(\tau(t)))<0,\quad t\geq t_1 \tag{3.2.21}$$

因此有$r(t)\left((a(t)z'(t))'\right)^{\alpha}$在$[t_1,+\infty)$单调减少。

设$\left(\left(a(t)z'(t)\right)'\right)^{\alpha}>0$对一切$t\in[t_1,+\infty)$成立，否则存在$t_2\in[t_1,+\infty)$使得

$$\left(\left(a(t)z'(t)\right)'\right)^{\alpha}=-C_1<0$$

那么对一切$t\in[t_2,+\infty)$有

$$r(t)\left(\left(a(t)z'(t)\right)'\right)^{\alpha}\le r(t_2)\left(\left(a(t_2)z'(t_2)\right)'\right)^{\alpha}.$$

即$\left(\left(a(t)z'(t)\right)'\right)^{\alpha}\le -C_1\dfrac{r(t_2)}{r(t)}$.

对上式两边同时由t_2到t积分有

$$a(t)z'(t)\le a(t_2)z'(t_2)-C_1^{\frac{1}{\alpha}}r^{\frac{1}{\alpha}}(t_2)\int_{t_2}^{t}\frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}}ds.$$

根据条件（A_2）得出上式趋于$-\infty$，当$t\to+\infty$时，

那么存在$t_3\in[t_2,+\infty)$，使得对一切的$t\in[t_3,+\infty)$有 $a(t)z'(t)\le -1$，

进而有$z(t)=z(t_3)+\int_{t_3}^{t}z'(s)ds\le z(t_3)-\int_{t_3}^{t}\frac{1}{a(s)}ds\to-\infty\ (t\to\infty)$，

这与$z(t)>0$矛盾，因此$\left(\left(a(t)z'(t)\right)'\right)^{\alpha}>0$即$\left(a(t)z'(t)\right)'>0$成立。

故函数$a(t)z'(t)$最终定号。证毕。

3.2.3 主要结果及其证明

定理 **3.2.3** 若方程

$$y'(t)+q(t)f(1-b)f\left(y^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))\right)f\left(\int_{t_0}^{\tau(t)}\left(\int_{u}^{\tau(t)}\frac{1}{a(s)}ds\right)r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)du\right)=0 \qquad (3.2.31)$$

是振动的，则方程（3.2.11）的解$x(t)$或者振动或者$\lim_{t\to+\infty} x(t)=0$。

证明：假设$x(t)$是方程（3.2.31）的非振动解，设$x(t)>0$（$t>t_1>t_0>0$）

由引理 3.2.2 可知$z(t)$满足（I）或（II）之一。

$a(t)z'(t)>0$，根据引理 3.2.2 中（3.3.21）式可知$\left(r(t)\left((a(t)z'(t))'\right)^{\alpha}\right)'$在$[t_1,+\infty)$上单调减少，

因此对任意的$t>t_1$有

$$\begin{aligned} a(t)z'(t) &> \int_{t_1}^{t}(a(u)z'(u))'du \\ &= \int_{t_1}^{t} r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)\left(r(u)\left((a(u)z'(u))'\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}du \\ &\geq \left(r(t)\left((a(t)z'(t))'\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_1}^{t} r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)du \end{aligned}$$

于是$z'(t)>\frac{1}{a(t)}\left(r(t)\left((a(t)z'(t))'\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_1}^{t} r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)du$.

对上式两边由t_1到t积分得到

$$\begin{aligned} z(t) &> \int_{t_1}^{t}ds\int_{t_1}^{s}\frac{1}{a(s)}\left(r(s)\left((a(s)z'(s))'\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)du \\ &= \int_{t_1}^{t}du\int_{u}^{t}\frac{1}{a(s)}\left(r(s)\left((a(s)z'(s))'\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)ds \\ &\geq \left(r(t)\left((a(t)z'(t))'\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_1}^{t}\int_{u}^{t}\frac{1}{a(s)}r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)dsdu. \end{aligned}$$

因此存在$t_2\in[t_1,+\infty)$使得对一切的$t\in[t_2,+\infty)$，

令 $y(t)=r(t)\left(\left(a(t)z'(t)\right)'\right)^{\alpha}$，有上式可得

$$z(\tau(t))\geq y^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))\int_{t_1}^{\tau(t)}\int_{u}^{\tau(t)}\frac{1}{a(s)}r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)dsdu \tag{3.3.32}$$

由 $z'(t)>0$ 及条件（A_3)(A_4）与式（3.2.12）有

$$x(t)=z(t)-p(t)x(\sigma(t))>z(t)-p(t)z(\sigma(t))>(1-p)z(t) \tag{3.3.33}$$

由式（3.3.32)、（3.3.33）及方程（3.2.11）有

$$\begin{aligned}-y'(t)&=q(t)f(x(\tau(t)))\geq q(t)f((1-p)z(\tau(t)))\\&\geq q(t)f(1-p)f(z(\tau(t)))\\&\geq q(t)f(1-p)f\left(y^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))\right)f\left(\int_{t_1}^{\tau(t)}\int_{u}^{\tau(t)}\frac{1}{a(s)}r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)dsdu\right)\end{aligned}$$

从而 $y(t)$ 是 $y'(t)+q(t)f(1-p)f\left(y^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))\right)f\left(\int_{t_1}^{\tau(t)}\int_{u}^{\tau(t)}\frac{1}{a(s)}r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)dsdu\right)\leq 0$ 的正解，所以方程（3.2.11）也有正解，这与方程（3.2.11）是振动矛盾，证毕。

总结与展望

微分方程的振动性探究是微分方程研究的一个重要组成部分，它对很多问题在理论上和现实应用里具有重要意义。本文内容主要研究了几类泛函微分方程解的振动性，而对于泛函微分方程解的振动性研究会有更好的结果，有待于今后作进一步的研究。

本文主要研究的内容有：

1、 第一章主要介绍了微分方程的提出及发展和本文要做的工作。

2、 第二章主要介绍了两类二阶非线性泛函微分方程解的振动性，运用一些分析的技巧考虑方程（2.1.4）和（2.1.5），获得了一些结论，丰富了已有文献的探究范围。

3、 第三章主要介绍了几个三阶的非线性中立型微分方程解的振动性，运用了 Riccati 和积分平均技巧，分别给出（3.1.11）（3.1.12）（3.2.11）的一些条件和结论，并推广了方程已有的结果。

本文的创新点在于将关于一些已有的方程的振动结果推广到本文新给出的方程，建立新的充分判据，将已有的结果推广。

对于微分方程的振动问题，有大量的学者进行了深入的探究，然而，这一领域还存在着许多值得研究的问题：

受到文献[32]启发还可得到有关方程

$$\left(r(t)\left(\left(a(t)(x(t)+p(t)x(\sigma(t)))'\right)'\right)^{\alpha}\right)'+\int_a^b q(t,\xi)f(x[\tau[t,\xi]])d\xi=0$$

和

$$\left(r(t)\left(\left(a(t)\left(x(t)+\int_c^d p(t,\eta)x(\tau(t,\eta)d\eta)\right)'\right)'\right)^{\alpha}\right)'+\int_a^b q(t,\xi)f(x[\tau[t,\xi]])d\xi=0$$

的解的振动性的进一步探讨。

因此，微分方程的振动性理论今后还需要进一步的研究。

参考文献

[1] Swanson C.A. Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations. New York:Academic Press, 1968：4-289.

[2] 燕居让. 常微分方程振动理论. 太原：山西教育出版社，1992：1-153.

[3] 李森林，温文志. 泛函微分方程. 第一版. 长沙：湖南科学技术出版社，1987：346-416.

[4] Fite W B. Properties of the solutions of certain functional differential equations. Trans Amer Math Soc, 1921,22: 311-319.

[5] A.Wintner,A. Criterion of Oscillatory Stablity , Quart. Appl. Math. 1949，7: 115-117.

[6] P.Hartman. On Nonoscillatory Linear Differential Equations os Second Order. Amer. Math. 1952，74:389-400.

[7] I.V.Kamenev. An Integral Criterion for Oscillation of Linear Differential Equations of Second Order. Mat.Zametki,1978，23: 249-251.

[8] J.Yan. Oscillation Theorems for Second Order Linear Differential Equations With Damping. Proc.Amer.Math.Soc. 1986，98：276-282.

[9] Ch.G.Philos. Oscillation Theorems for Linear Differential Equations of Second Order. Arch.Math.(Basel) 1989，53: 482-492.

[10] D.B.Hinton and R.T.Lewis. Oscillation Theory of Generalized Second Order Differential Equations. Rocky Mountain. Math. 1980，10: 751-761.

[11] G.J.Butler,L.H.Erbe and A.B.Mingarelli. Ricccati Techniques and Varia-tional Principles in Oscillation Theory for Linear Systems, Trans. Amer. Math. Soc. 1978，303: 263-282.

[12] L.H.Erbe,Q.Kong and S.Ruan. Kamenev Type Theorems for Second Order Matrix Differential Systems. Proc. Amer. Math. Soc. 1993，117: 957-962.

[13] R.Byers,B.J.Harries and M.K.Kwong. Weighted Means and Oscillation Conditions for Second Order Matrix Differential Equations. Diff. Eqs. 1986，61: 164-177.

[14] F.Meng,J.Wang and Z.Zheng. A Note On Kamenev Type Theorems For Second Order

Matrix Differential Systems. Proc. Amer. Math. Soc. 1998，126: 391-395.

[15] Z.Zheng,F.Meng and Y.Yu. On the Oscillation of Second Order Matrix Differential Systems. Acta.Math.Sinica . 1998，41: 1231-1238.

[16] 张炳根. 二阶泛函微分方程解的振动性与非振动性. 数学年刊. 1981,2（1）：25-32.

[17] 傅希林，余元洪. 二阶非线性中立型微分方程的振动性与渐近性.应用数学，1993.6（2）：228-230.

[18] 席鸿建. 二阶非线性中立型微分方程的振动性和渐近性. 广西大学学报（自然科学版）.1995,20（4）: 334-336.

[19] 张炳根. 泛函微分方程振动理论的发展. 科学通报.1998,43（4）: 345-354.

[20] Wong,P.J.Y.&Agarwal,R.P., Oscillatory behavior of solutions of Certain Second order nonlinear differential equations. Math.Anal.Appl. 1996,198: 337-354.

[21] Bai,Y.Z., Oscillatory and asymptotic behavior of solutions for second order difference equations. Master Thesis,Qufu Normal University,1999.

[22] 彭名书，葛渭高，王淮. 非线性泛函微分方程解的形态.应用数学学报，2002,25（2）: 365-371.

[23] 白玉真. 一类二阶非线性微分方程解的振动性与渐进性.数学年刊，2002,23A（3）: 339-344.

[24] 侯新华，厉亚. 二阶非线性泛函微分方程解的振动性与渐进性.湖南城市学院学报.2004,13（4）: 44-45.

[25] Li,W.T., Oscillation of certain Second order nonlinear differential equations. Math.Anal.Appl.,1998,217(1): 1-14.

[26] 余元洪. 三阶非线性中立型泛函微分方程的振动性. 滨州学院学报，2010,26(6): 1-6.

[27] 屈英.孙博. 三阶非线性中立型微分方程的振动性. 数学实践与认识，2011,41(6): 244-248.

[28] 胡迎春，白玉真. 一类三阶非线性中立型时滞微分方程的振动性. 曲阜师范大学学报，2013,39(2): 60-65.

[29] Erbe L. Oscillation criteria for second order nonlinear delay equations. Canada Math Bull,1973(16): 49-56.

[30] Kiguradze I T. On the oscillation of solutions of the equation $\frac{d^m u}{dt^m}+a(t)|u|^m signu=0$. Math Sb,1964,65(2): 172-187.

[31] Philos Ch G. Oscillation theorems for linear differential equation of second order. Arch Math,1989(53): 482-492.

[32] 仉志余，王晓霞，俞元洪. 三阶中立型分布时滞微分方程的振动定理. 工程数学学报. 2013,30(6): 871-880.

[33] 仉志余，王晓霞，林诗仲，俞元洪. 非线性中立型时滞微分方程的振动和非振动准则. 系统科学与数学. 2006,(3): 325-334.

[34] 仉志余，周勇，俞元洪. 非线性二阶泛函微分方程的振动准则. 系统科学与数学. 2000,20（1）：1-10.

[35] 仉志余. 一类二阶泛函微分方程的渐近性和振动性. 太原机械学院学报. 1990,11(2): 8-22.

[36] A.P.Ravi,S.R.Grace. Oscillation criteria for certain nth order delay differential equations. Math.Anal.Appl, 1983(91): 352-366.

[37] G.J.Butler. The Oscillatory behavior of a second order nonlinear differential equations. Math.Anal.Appl, 1977(57): 273-289.

[38] M.A.Ei-Sayed. An Oscillation criterion for a forced second order linear differential equations. Proc.Amer.Math.Soc, 1993(118): 813-817.

[39] S.R.Grace. Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with damping. Austral.Math.Soc,1990(49A): 43-54.

[40] S.R.Grace. Oscillation theorems for nonlinear differential equations of second order. Math.Anal.Appl, 1992(171): 220-241.

[41] B.J.Harries. On the Oscillation of solutions of linear differential equations,

Mathematika1984(31)：214-226.

[42] C.C.Huang. Oscillation and nonoscillation for second order linear differential equations. Math.Anal.Appl,1997(210)：712-723.

[43] H.J.Li. Oscillation criteria for second order linear differential equations. Math.Anal.Appl, 1995(194)：217-234.

[44] 周勇，俞元洪. 一阶中立型时滞微分方程的振动性. 数学研究与评论，2001,21（3）：86-88.

[45] 庾建设，王志成. 中立型时滞微分方程的振动性. 数学学报，1994,37（1）：129-133.

[46] 程金发. 二阶线性中立时滞微分方程振动解的存在性. 系统科学与数学，2004,24（3）： 389-397.

[47] 师文英，王培光. 一类三阶中立型泛函微分方程的振动性. 数学的实践与认识，2004,34（3）：125-131.

[48] 刘开恩. 二阶非线性中立型微分方程的振动性. 应用数学，2004,17（增）：190-194.

[49] 郭嫱，张炳根. 非线性中立型时滞微分方程解的振动性. 青岛海洋大学学报，2003,33（3）：483-488.

[50] 燕居让，张全信. 二阶非线性泛函微分方程解的振动性质. 数学物理学报，1992,（3)：345-350.

[51] 庄容昆，米思明，王其如. 二阶非线性中立型微分方程的 Sturm 比较定理. 中山大学学报（自然科学版），2005,4（1）：5-12.

[52] 米玉珍，余秀萍. 二阶非线性中立型时滞微分方程振动准则. 河北师范大学学报（自然科学报），2003,27（6）：553-556.

[53] 林文贤. 一类二阶非线性中立型方程的振动准则. 纯粹数学与应用数学，2004,20（3）：263-267.

[54] 张炳根. 一类中立型方程的正解. 应用数学学报，1996,19（2）：222-230.

[55] 厉亚，黄立宏，孟益民. 二阶非线性泛函微分方程的振动准则. 湖南大学学报，2006,33（2）：128-130.

[56] 柴益琴. 二阶非线性微分方程解的振动性与渐近性. 太原理工大学学报，2005,36

（2）：232-234.

[57] 王连文. 一阶中立型线性泛函微分方程解的振动性. 应用数学学报，1991,14（3）：348-359.

[58] Yu.V.Rogovchenko. Oscillation criteria for certain nonlinear differential equations. Math.Anal.Appl.,1999,229：399-416.

[59] Hale J K. Theory of functional differential equations. New York:Springer,1977：95-203.

[60] G.G.Hamedani,G.S.Krenz. Oscillation criteria for certain second order differential equations. Math.Anal.Appl.,1990,149：271-276.

致谢

本文是在我的导师仉志余教授的指导下完成的。

首先感谢我的导师仉志余教授在学术上对我的指导，仉老师在学术上睿智敏捷，富有创造力；生活中像一个平易近人的长辈，仉老师在学习和生活中都给了我很多的关怀和教诲，使我能够完成学业。三年来，不管是培养计划的制定还是论文的选题、开题、研究以及撰写，都倾注了仉老师大量的心血，再次对导师仉志余教授表示最诚挚的谢意！

在这里还要感谢理学院老师们给予的关怀和支持，是他们教了我新的知识！

在论文的撰写期间，师弟王世利、室友刘舒婷以及同窗三年的各位同学也给予我极大的帮助，在此向他们表示由衷的感谢！

感谢我的父母、哥哥，感谢他们的无私奉献和帮助，是他们的关心和鼓励让我在前进的道路上充满希望和动力，让我克服困难，谢谢他们！

最后，感谢对本文进行评审并提出宝贵意见的各位专家！

攻读硕士学位期间发表的论文及所取得的研究成果

[1] 王芳. 一类二阶非线性泛函微分方程的振动准则.山西大同大学学报（自然科学版），2013,29（4）：4-6.

[2] 王芳. 一类三阶非线性中立型泛函微分方程的振动性.山西大同大学学报（自然科学版），2014,30（1）：15-17.

中北大学研究生院监制